

Introducción a la simulación de sistemas dinámicos en “*Matlab-Simulink*” a partir de la ecuación diferencial que rige su comportamiento.

Apellidos, nombre	Ángel Sapena Bañó (asapena@die.upv.es)
Departamento	Ingeniería eléctrica
Centro	Universitat Politècnica de València

1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se presentan las características básicas que hay que tener en cuenta a la hora de resolver una ecuación diferencial mediante la herramienta de simulación "Simulink" perteneciente al software matemático "Matlab". Para ello, la resolución de la ecuación diferencial se va a realizar mediante un diagrama de bloques que simula el comportamiento dinámico del sistema modelizado.

2 Introducción

La simulación de sistemas resulta esencial en el entorno industrial ya que permite, entre otras, las siguientes acciones:

- Comprobar si el sistema cumple con las especificaciones de la aplicación donde va a quedar instalado.
- Determinar la existencia de errores en el diseño. Permite detectar errores en el diseño antes de pasar a la fase de fabricación reduciendo los costes de fabricación.
- Detectar posibles mejoras en el sistema propuesto.
- Comprobar el funcionamiento del sistema ante comportamientos anómalos o ante averías.

Actualmente existen un elevado número de softwares que permiten la simulación de sistemas, equipos, máquinas, componentes, procesos, etc. Lo que se propone en este artículo docente es el uso de un software Matlab-Simulink, cuyo uso está ampliamente extendido, para la simulación de un sistema dinámico basándose en la ecuación diferencial o ecuaciones diferenciales que rigen su comportamiento.

3 Objetivos

El objetivo de este artículo docente es que el alumno sea capaz de:

- Construir el diagrama de bloques en "Simulink" a partir de la ecuación diferencial que reproducirá el comportamiento del sistema dinámico a simular.
- Simular el sistema dinámico y visualizar la evolución de las distintas magnitudes que intervienen en el sistema.

4 Desarrollo

- Conocimientos previos: para aprovechar correctamente este artículo docente es necesario que el alumno cuente con nociones básicas de ecuaciones diferenciales y sepa interactuar, de manera básica, con la herramienta Matlab-Simulink.
- Utilidad: los softwares de simulación y su utilización están ampliamente extendidos en el campo científico y de la ingeniería debido a distintos factores como, por ejemplo, habitualmente es más sencillo, económico y seguro realizar la simulación de un sistema que fabricar distintos prototipos para comprobar su comportamiento.

La estructura que sigue es la siguiente: en primer lugar, se plantea una ecuación diferencial sencilla de primer orden, no asociada a ningún tipo de sistema en concreto. Seguidamente se procede al diseño del diagrama de bloques de función con el cuál simular su comportamiento y ver que herramientas se pueden utilizar para visualizar el comportamiento de las distintas variables que conforman el sistema. Posteriormente, se propone la resolución de una ecuación diferencial de segundo orden para aumentar el grado de dificultad. Y finalmente, se proponen distintos ejemplos resueltos de manera que el alumno tenga herramientas para poder practicar y profundizar en los conocimientos y habilidades adquiridos.

4.1 Punto de partida – Ecuación diferencial de primer orden

Como primera aproximación se propone la siguiente ecuación diferencial:

$$x(t) = 4 + K \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

El primer paso a realizar consiste en despejar la derivada de mayor orden. En este caso como se trata de una ecuación diferencial de primer orden, sólo existe un término diferencial. De este modo la ecuación quedaría del siguiente modo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{K}(x(t) - 4) \quad (2)$$

Seguidamente abrimos la herramienta simulink dentro del entorno de Matlab y damos a la opción de crea un nuevo sistema tal como puede observarse en la Figura 1. Existe un elevado número de bloques ordenados por carpetas atendiendo a su funcionalidad (diagrama de árbol de la izquierda que se puede ver en la Figura 1). Para los ejemplos que se tratan en este artículo docente sólo se van a utilizar los bloques pertenecientes a la toolbox de simulink. Para poder insertar los distintos bloques en el nuevo modelo que se está generando únicamente es necesario pincharlos y arrastrarlos, soltándolos en la posición que el usuario decida.

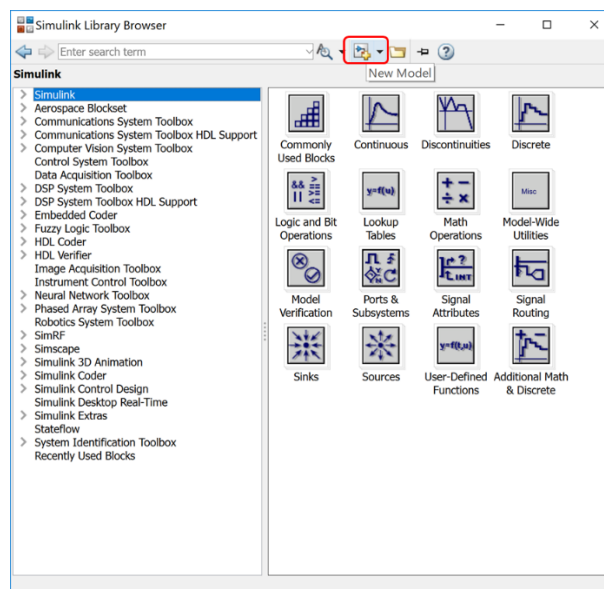


Figura 1: Librería de bloques de Simulink.

El siguiente paso consiste en partir de la siguiente hipótesis: cuando se tenga el sistema completamente implementado se conocerá en qué punto se encuentra la diferencial de mayor orden, en este caso dx/dt , y haciendo la integral de la misma

se obtendría, por consiguiente, la sucesiva de orden menor, y así sucesivamente. En el caso que se está trabajando al realizar la integral se obtendría la variable $x(t)$. Para partir de esta hipótesis, se inserta el bloque integrador tal como puede observarse en la Figura 2 y se considera que como entrada se tendrá la derivada y como salida la integral de la misma.

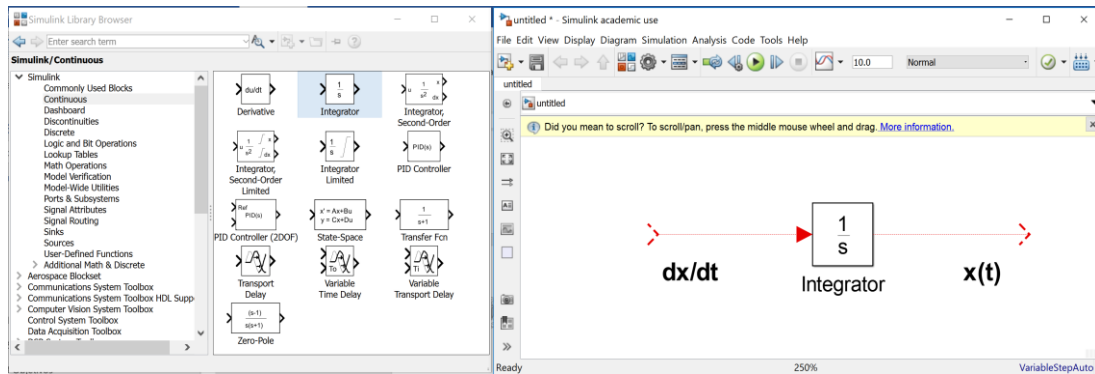


Figura 2: Inserción del bloque integrador.

Seguidamente se resuelve mediante diagrama de bloques, aquello que se encuentra dentro del paréntesis en la ecuación 2, es decir, $x(t)-4$. Para ello insertamos un bloque sumador que se encargara de hacer la resta, e insertamos una constante a la que se le asigna el valor 4 y se conecta correctamente con las entradas correspondientes del sumador, tal como puede observarse en la Figura 3.

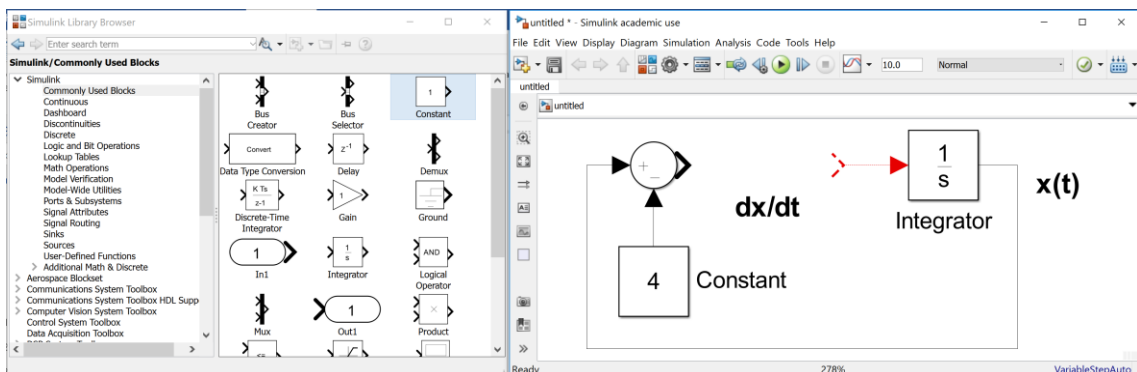


Figura 3: Resolución de las operaciones incluidas dentro del paréntesis.

Finalmente, se observa que, para que el sistema mostrado en la Figura 3 cumpla con la hipótesis planteada en el paso 2, es decir, saber en qué punto se encuentra la diferencial de mayor grado, y observando la ecuación (2) lo único necesario es, al resultado de $x(t)-4$ mostrado en la Figura 3 dividirlo por la constante K . Para ello, se inserta en el diagrama de bloques una ganancia (bloque gain) tal como puede observarse en la Figura 4 quedando el sistema resuelto y listo para su simulación.

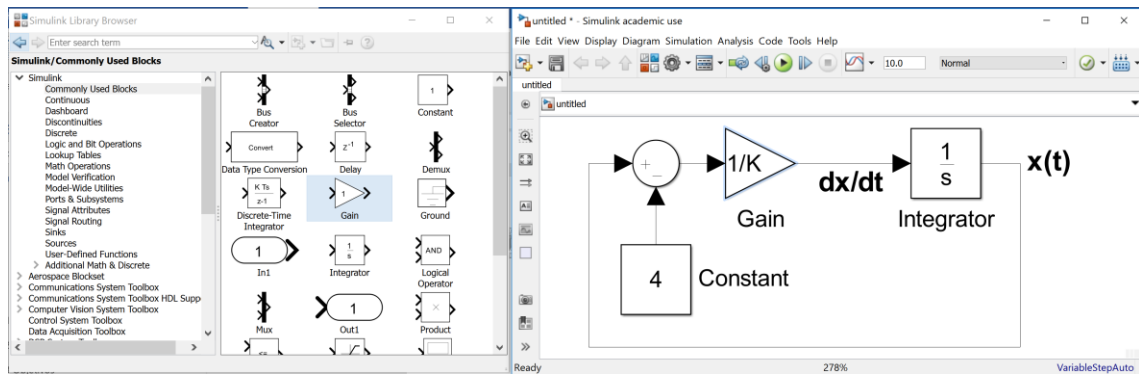


Figura 4: Diagrama de bloques necesario para la simulación de la ecuación diferencial (1).

Además, la herramienta de simulación simulink, ofrece distintos bloques, que permiten conocer la evolución de las distintas señales involucradas. En este caso se utilizan los dos bloques que se pueden mostrar en la Figura 5.

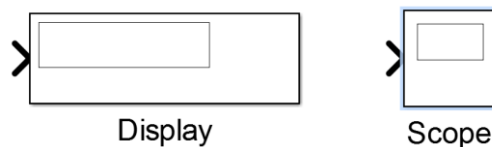


Figura 5: izquierda, bloque "Display" que permiten visualizar el valor en tiempo real de la variable que se conecte a la entrada. Derecha, bloque "Scope", que permite realizar un gráfico en el que se muestra la evolución temporal de la variable que se conecte a su puerto de entrada.

Para observar las diferencias entre ambos, se van a utilizar para visualizar el valor de la variable x en el diagrama de bloques creado en la Figura 4 asignando a k un valor de 2. Los resultados se muestran en la Figura 6. Tal como puede verse, el bloque "Display" sólo permite visualizar el valor de la variable en cada instante de la simulación mientras que el bloque "Scope" (derecha) permite observar la evolución temporal de dicha variable a lo largo de la simulación.

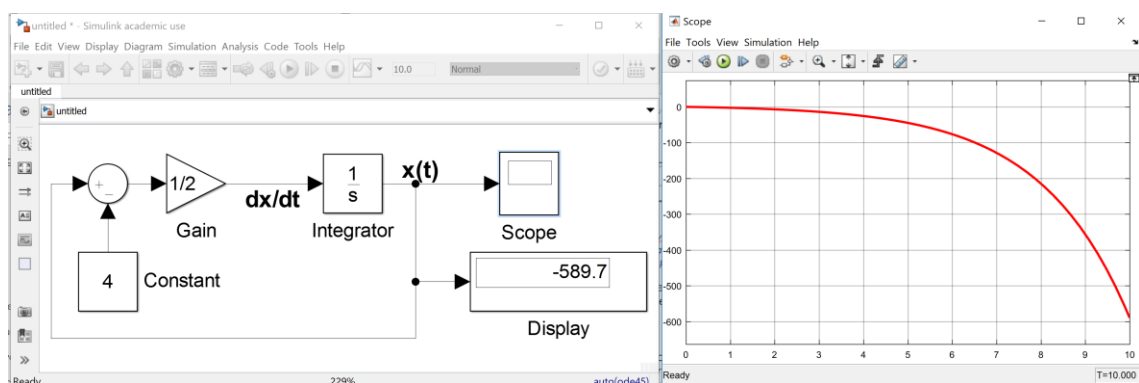


Figura 6: Resultados de la simulación de la ecuación (1)

4.2 Ecuación diferencial de segundo orden

En este punto, se propone la simulación de un sistema cuyo comportamiento estaría modelizado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{3d^2x}{dt^2} + \frac{2dx}{dt} - x - 5 = 0 \quad (3)$$

Tomando el mismo punto de partida que el caso anterior, el primer paso consiste en despejar la derivada de mayor orden, quedando del siguiente modo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{3} \left(x + 5 - \frac{2dx}{dt} \right) \quad (4)$$

Seguidamente, se parte de la hipótesis de que se conoce el valor de la derivada de mayor orden y utilizando los bloques de integración necesarios se irán obteniendo las subsiguientes derivadas de menor orden, tal como se muestra en la Figura 7

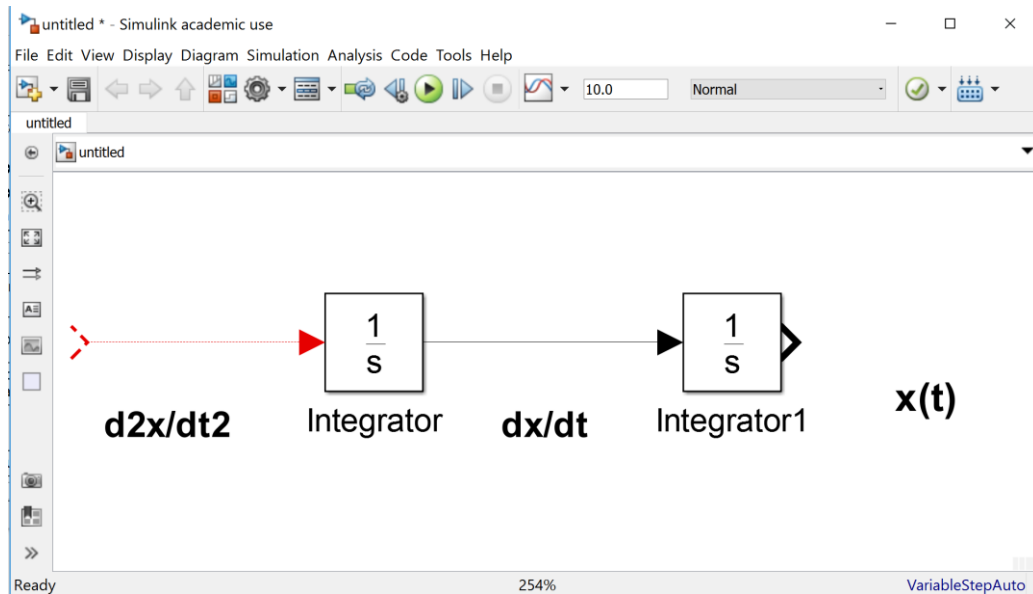


Figura 7: Inserción de los bloques de integración para la resolución de la ecuación diferencial de segundo orden.

Seguidamente se insertan los bloques necesarios para resolver las operaciones existentes dentro del paréntesis de la ecuación (4) tal como se muestra en la Figura 8.

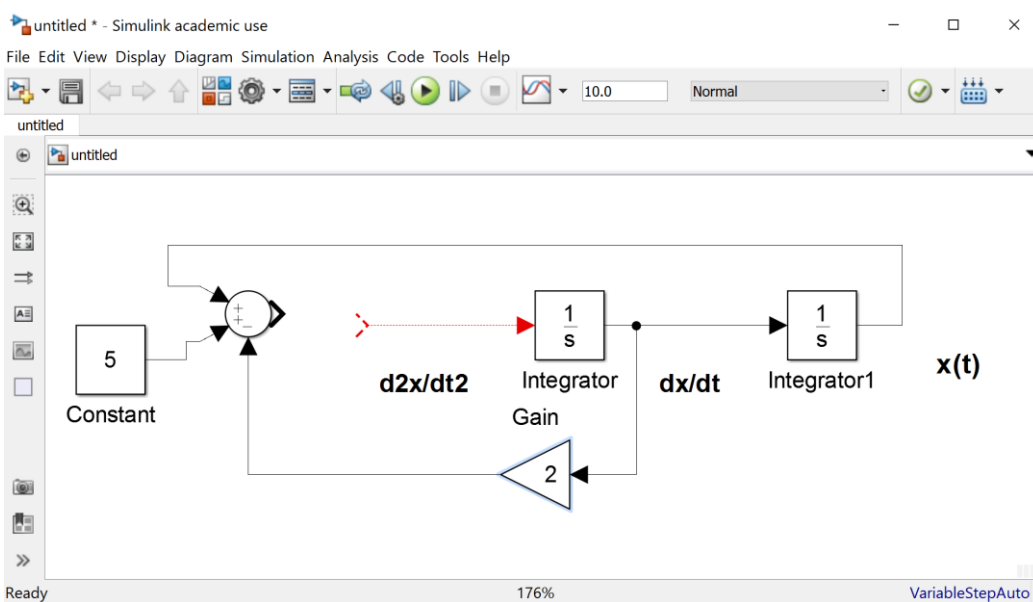


Figura 8: Resolución de las operaciones existentes dentro del paréntesis de la ecuación (4).

Finalmente, se inserta la ganancia necesaria, en este caso $1/3$, tal como puede observarse en la ecuación 3, de manera que se cumpla la hipótesis que se había propuesto al principio y se obtenga el valor de la diferencial de mayor grado. Además, se inserta un bloque "Scope" con dos ejes para monitorizar el valor de las variables x y dx/dt , tal como puede verse en la Figura 9.

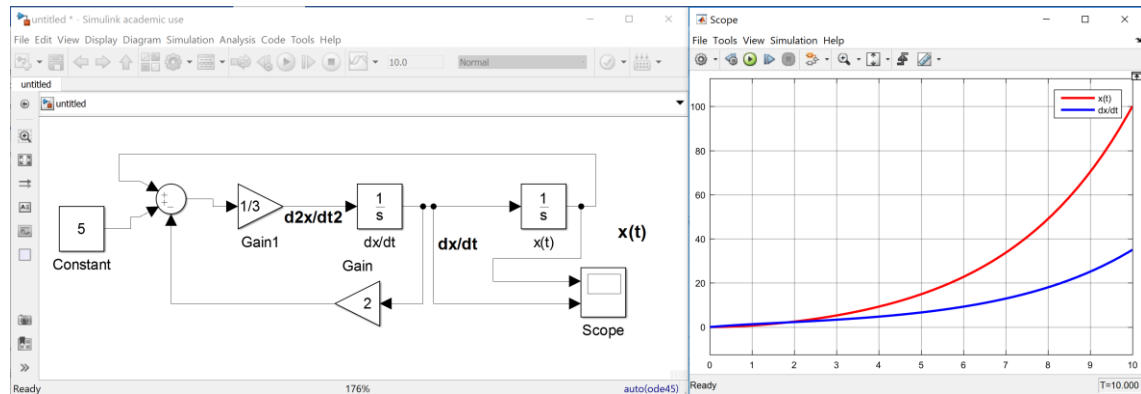


Figura 9: Diagrama de bloques para la simulación de la ecuación diferencial de segundo orden (3) y resultados de la simulación.

4.3 Recapitulación

Una vez, resueltos estos dos ejemplos de aplicación, seguidamente se resumen los pasos a seguir para poder construir el diagrama de bloques necesario para realizar la simulación del sistema modelizado mediante una ecuación diferencial:

- I. Despejar la ecuación diferencial de mayor grado.
- II. Partir de la hipótesis de que el valor de la diferencial de mayor grado es conocido e insertar tantos integradores como sean necesarios para ir obteniendo, a partir de la integración, las diferenciales de cada vez menor grado.
- III. Insertar los bloques necesarios para resolver las operaciones matemáticas pertinentes como resultado de haber despejado la diferencial de mayor grado.
- IV. Introducir la ganancia, en caso de ser necesario, para que se cumpla la hipótesis con la que se partía en el segundo paso, es decir, para obtener el valor de la diferencial de mayor grado.

4.4 Para profundizar

A continuación, se proponen una serie de ecuaciones diferenciales y su correspondiente diagrama de bloques para que el alumno pueda profundizar y tenga una serie de ejemplos resueltos con los que poder contrastar sus avances. Se recomienda encarecidamente que el alumno trate de realizar los distintos ejemplos propuestos antes de pasar a visualizar los resultados.

- a) $y - \frac{dy}{dt} + 3 = 0$
- b) $10 = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$
- c) $A \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + B \cdot \frac{dy}{dt} + C \cdot y = 10$
- d) $\frac{d^2y}{dt^2} + B \cdot \frac{dy}{dt} = 0$

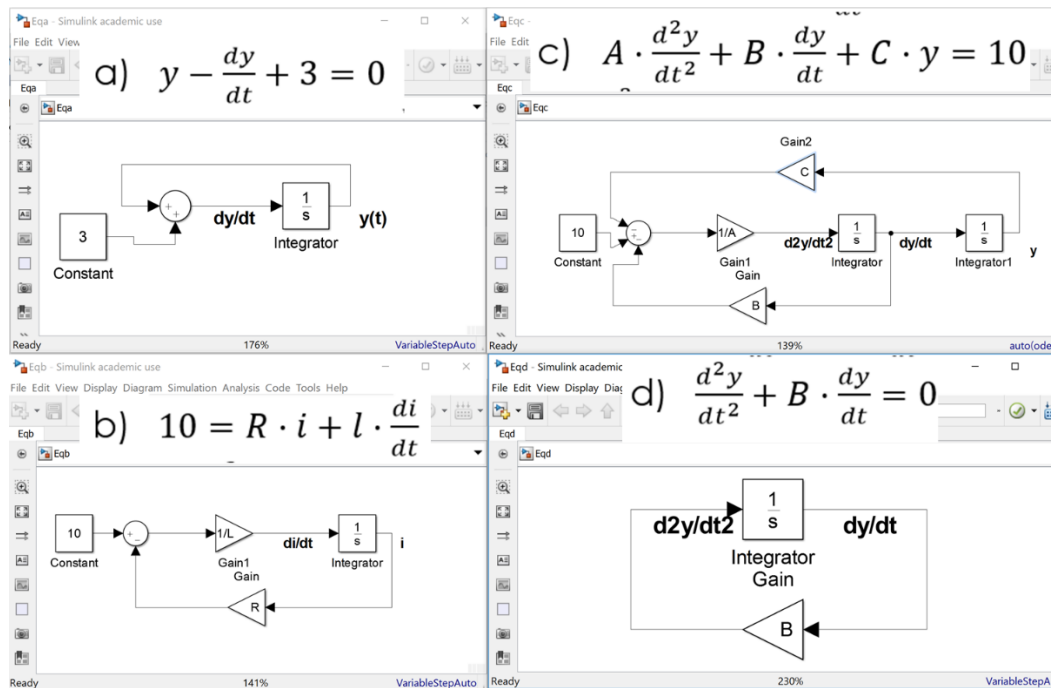


Figura 10: Solución a los ejemplos de ampliación propuestos.

5 Conclusiones

A lo largo de este objeto de aprendizaje hemos visto como generar el diagrama de bloques necesario para simular un sistema dinámico cuyo comportamiento esta modelizado por una ecuación diferencial. Se introducido el método mediante una ecuación sencilla de primer orden. Posteriormente se ha repetido el procedimiento para una ecuación diferencial de segundo orden. Además, también se han presentado los objetos necesarios para poder monitorizar el estado de las distintas variables que intervienen en el sistema a lo largo de la simulación y que permitirán comprobar si los resultados son correctos y coherentes. Finalmente, se han propuesto una serie de ejemplos de ampliación para que el alumno pueda trabajar de manera autónoma y afianzar los conocimientos adquiridos.

6 Bibliografía

6.1 Libros:

Manuel Gil Rodríguez: "Introducción Rápida a Matlab y Simulink para ciencia e ingeniería", Ed. agapea.com.

6.2 Referencias de fuentes electrónicas:

Mathworks: simulación de sistemas dinámicos:
<https://es.mathworks.com/discovery/sistemas-dinamicos.html>